



Kategorientheorie für Programmierer

Hausaufgabenblatt 5 – WS19

Tübingen, 27. November 2019

Aufgabe 1: Lektüre

Für die nächste Sitzung lesen Sie bitte Kapitel 10 und schicken Ihre Fragen bis Dienstag Abend an uns.

Aufgabe 2: Natürliche Transformationen – Ein Beispiel

Gegeben sind folgende Definitionen für einen generischen Binärbaum:

```
data Tree a = Empty | Node a (Tree a) (Tree a)
```

```
instance Functor Tree where
```

```
  fmap _ Empty      = Empty
```

```
  fmap f (Node a l r) = Node (f a) (fmap f l) (fmap f r)
```

```
flatten :: Tree a -> [a]
```

```
flatten Empty = []
```

```
flatten (Node a l r) = a : (flatten l ++ flatten r)
```

Zeigen Sie, dass `flatten` eine natürliche Transformation vom Baum- zum Listenfunktor ist (*Hinweis*: Induktion). Sie können dabei annehmen, dass `fmap f (xs ++ ys) = fmap f xs ++ fmap f ys` gilt (mit anderen Worten: `(++)` ist eine natürliche Transformation von Paaren von Listen zu Listen).

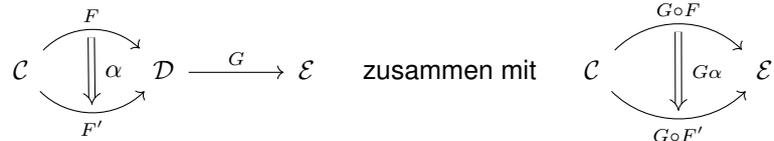
Aufgabe 3: Natürliche Transformationen – Komposition

Beweisen Sie, dass die horizontale Komposition von natürlichen Transformationen wieder eine natürliche Transformation ergibt.

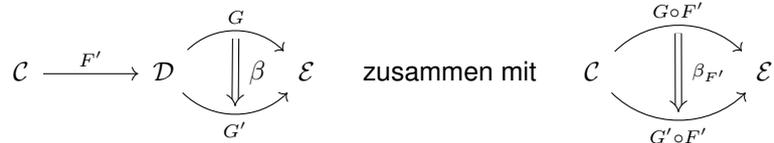
Hinweis: Betrachten Sie dazu eine alternative Definition von horizontaler Komposition. Seien dazu \mathcal{C} , \mathcal{D} und \mathcal{E} Kategorien und $F, F': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ sowie $G, G': \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ Funktoren. Seien außerdem $\alpha: F \Rightarrow F'$ und $\beta: G \Rightarrow G'$ natürliche Transformationen.

Nun definieren wir neue natürliche Transformationen $G\alpha: G \circ F \Rightarrow G \circ F'$ mit $(G\alpha)_a := G\alpha_a$ und $\beta_{F'}: G \circ F' \Rightarrow G' \circ F'$ mit $(\beta_{F'})_a := \beta_{F'a}$ (diese Operationen werden auch als *Whiskering* bezeichnet). Mit deren Hilfe lässt sich nun eine alternative, äquivalente Version der horizontalen Komposition definieren: $\beta * \alpha := \beta_{F'} \circ G\alpha$ (dabei ist $*$ die horizontale und \circ die vertikale Komposition von natürlichen Transformationen). Aus den angegebenen

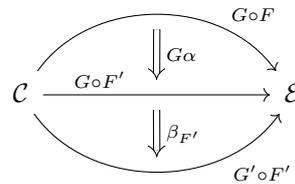
Schritten ergeben sich folgende Situationen:



sowie



ergeben



Zeigen Sie nun, dass $G\alpha$, $\beta_{F'}$ und somit auch $\beta * \alpha$ natürliche Transformationen sind.

Aufgabe 4: Natürliche Transformationen – Profunktoren

Sei \mathbf{Hask} die Kategorie der Haskell-Typen und \mathbf{Set} die Kategorie der Mengen. Dann ist $\text{Hom}: \mathbf{Hask}^{\text{op}} \times \mathbf{Hask} \rightarrow \mathbf{Set}$ wie üblich der Hom-Funktor auf \mathbf{Hask} . Sei außerdem ein weiterer Profunktor $P: \mathbf{Hask}^{\text{op}} \times \mathbf{Hask} \rightarrow \mathbf{Set}$ gegeben durch

$$P(a, b) = \text{Hom}(a, \text{Integer}) \times_{\mathbf{Set}} \text{Hom}(\text{Integer}, b),$$

wobei $\times_{\mathbf{Set}}$ der Produkt-Bifunktor in \mathbf{Set} ist. Weiter sei für jedes Paar von Typen (a, b) die Funktion $\alpha_{a,b}$ gegeben durch

$$\alpha_{a,b}(f, g) := g \cdot f$$

Zeigen Sie, dass α eine natürliche Transformation $\alpha: P \rightarrow \text{Hom}$ ist.

Anmerkung: P wird dabei durch natürliche Art zum Profunktor: $P(f, g) = \text{Hom}(f, \text{id}_{\text{Integer}}) \times_{\mathbf{Set}} \text{Hom}(\text{id}_{\text{Integer}}, g)$.