EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Programmiersprachen

Prof. Klaus Ostermann

Leitung des Seminars
David Binder
Ingo Skupin

Kategorientheorie für Programmierer

Hausaufgabenblatt 5 – WS19

Tübingen, 27. November 2019

Aufgabe 1: Lektüre

Für die nächste Sitzung lesen Sie bitte Kapitel 10 und schicken Ihre Fragen bis Dienstag Abend an uns.

Aufgabe 2: Natürliche Transformationen – Ein Beispiel

Gegeben sind folgende Definitionen für einen generischen Binärbaum:

```
data Tree a = Empty | Node a (Tree a) (Tree a)

instance Functor Tree where
  fmap _ Empty          = Empty
  fmap f (Node a l r) = Node (f a) (fmap f l) (fmap f r)

flatten :: Tree a -> [a]
flatten Empty = []
flatten (Node a l r) = a : (flatten l ++ flatten r)
```

Zeigen Sie, dass `flatten` eine natürliche Transformation vom Baum- zum Listenfunktor ist (*Hinweis:* Induktion). Sie können dabei annehmen, dass `fmap f (xs ++ ys) = fmap f xs ++ fmap f ys` gilt (mit anderen Worten: `(++)` ist eine natürliche Transformation von Paaren von Listen zu Listen).

Aufgabe 3: Natürliche Transformationen – Komposition

Beweisen Sie, dass die horizontale Komposition von natürlichen Transformationen wieder eine natürliche Transformation ergibt.

Hinweis: Betrachten Sie dazu eine alternative Definition von horizontaler Komposition. Seien dazu $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ und $\mathcal{E}$ Kategorien und $F, F' \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sowie $G, G' \colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ Funktoren. Seien außerdem $\alpha \colon F \Rightarrow F'$ und $\beta \colon G \Rightarrow G'$ natürliche Transformationen.

Nun definieren wir neue natürliche Transformationen $G\alpha \colon G \circ F \Rightarrow G \circ F'$ mit $(G\alpha)_a := G\alpha_a$ und $\beta_{F'} \colon G \circ F' \Rightarrow G' \circ F'$ mit $(\beta_{F'})_a := \beta_{F'a}$ (diese Operationen werden auch als *Whiskering* bezeichnet). Mit deren Hilfe lässt sich nun eine alternative, äquivalente Version der horizontalen Komposition definieren: $\beta * \alpha := \beta_{F'} \circ G\alpha$ (dabei ist $*$ die horizontale und $\circ$ die vertikale Komposition von natürlichen Transformationen). Aus den angegebenen

Schritten ergeben sich folgende Situationen:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \arrow[r, "G"] & \mathcal{E} \end{tikzcd} \quad \text{zusammen mit} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "G\circ F"] \arrow[r, bend right, "G\circ F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow G\alpha"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

sowie

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F'"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{E} \end{tikzcd} \quad \text{zusammen mit} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "G\circ F'"] \arrow[r, bend right, "G'\circ F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta_{F'}"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

ergeben

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "G\circ F"] \arrow[r, "G\circ F'" description] \arrow[r, bend right=60, "G'\circ F'"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow G\alpha"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow \beta_{F'}"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

Zeigen Sie nun, dass $G\alpha$, $\beta_{F'}$ und somit auch $\beta * \alpha$ natürliche Transformationen sind.

Aufgabe 4: Natürliche Transformationen – Profunktoren

Sei $\mathbf{Hask}$ die Kategorie der Haskell-Typen und $\mathbf{Set}$ die Kategorie der Mengen. Dann ist $\mathrm{Hom}\colon \mathbf{Hask}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Hask} \to \mathbf{Set}$ wie üblich der Hom-Funktor auf $\mathbf{Hask}$. Sei außerdem ein weiterer Profunktor $P\colon \mathbf{Hask}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Hask} \to \mathbf{Set}$ gegeben durch

$$P(\mathtt{a}, \mathtt{b}) = \mathrm{Hom}(\mathtt{a}, \mathrm{Integer}) \times_{\mathbf{Set}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Integer}, \mathtt{b}),$$

wobei $\times_{\mathbf{Set}}$ der Produkt-Bifunktor in $\mathbf{Set}$ ist. Weiter sei für jedes Paar von Typen $(\mathtt{a}, \mathtt{b})$ die Funktion $\alpha_{\mathtt{a},\mathtt{b}}$ gegeben durch

$$\alpha_{\mathtt{a},\mathtt{b}}(\mathtt{f}, \mathtt{g}) \coloneqq \mathtt{g}\ .\ \mathtt{f}$$

Zeigen Sie, dass α eine natürliche Transformation $\alpha\colon P \stackrel{.}{\to} \mathrm{Hom}$ ist.

Anmerkung: P wird dabei durch natürliche Art zum Profunktor: $P(\mathtt{f}, \mathtt{g}) = \mathrm{Hom}(\mathtt{f}, \mathrm{id}_{\mathrm{Integer}}) \times_{\mathbf{Set}} \mathrm{Hom}(\mathrm{id}_{\mathrm{Integer}}, \mathtt{g})$.