EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Programmiersprachen

Prof. Klaus Ostermann

Leitung des Seminars
David Binder
Ingo Skupin

Kategorientheorie für Programmierer

Hausaufgabenblatt 9 – WS19

Tübingen, 9. Januar 2020

Aufgabe 1: Lektüre

Für die kommende Woche lesen Sie bitte Kapitel 22.

Aufgabe 2: Monaden

Im Abschnitt 22.3 sind die folgenden kommutativen Diagramme für die Monadengesetze gegeben:

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "T\eta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "\eta_T"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

1. Übersetzen Sie die Diagramme in Gleichungen zwischen Haskell Funktionen, wobei Sie für T die Listen Monade einsetzen.
2. Denken Sie sich einen Beispielwert für die linke obere Ecke im linken Diagramm aus, und vollziehen Sie nach, dass die Gleichung erfüllt wird.
3. Beweisen Sie die Monadengesetze für Listen durch *equational reasoning*.

   Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete (rekursive) Definition der entsprechenden Haskell Funktionen.

Aufgabe 3: Monoidale Kategorien

Im Abschnitt 22.1 werden monoidale Kategorien definiert. Zeigen Sie, dass **Hask** zusammen mit `Either` eine monoidale Kategorie bildet. Geben sie dazu die folgenden Dinge an:

1. Das neutrale Objekt i
2. Die Bifunktor-Instanz von `Either` (d.h. die Funktion `bimap`)
3. die natürlichen Transformationen $\alpha_{a,b,c}$, λ_a und ρ_a

Aufgabe 4: Monaden – ein Beispiel

Die Kategorie der punktierten Haskell-Typen, **Hask**$_*$ besitzt als Objekte Paare $(\mathtt{a}, \mathtt{t})$ von Haskell-Typen $\mathtt{a}$ und Termen $\mathtt{t}$ vom Typ $\mathtt{a}$. Die Morphismen zwischen $(\mathtt{a}, \mathtt{t_a})$ und $(\mathtt{b}, \mathtt{t_b})$ sind Haskellfunktionen $\mathtt{f} \colon \mathtt{a} \to \mathtt{b}$ mit $\mathtt{f}(\mathtt{t_a}) = \mathtt{t_b}$.

Betrachten Sie folgende Adjunktion von Funktoren zwischen **Hask** und **Hask**$_*$:

$$\textbf{Hask} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \textbf{Hask}_* \quad (L \dashv R)$$

Wobei die Funktoren durch

$$\begin{aligned} L\ \mathtt{a} &= (\mathtt{Either}\ ()\ \mathtt{a},\ \mathtt{Left}\ ()) & R\ (\mathtt{a}, \mathtt{t}) &= \mathtt{a} \\ L\ \mathtt{f} &= \lambda \mathtt{x} \to \mathtt{case\ x\ of} & R\ \mathtt{f} &= \mathtt{f} \\ &\qquad\qquad \mathtt{Left}\ () \to \mathtt{Left}\ () \\ &\qquad\qquad \mathtt{Right\ y} \to \mathtt{Right}\ (\mathtt{f\ y}) \end{aligned}$$

Gegeben sind.
Leiten Sie die Monadeninstanz für $R \circ L$ aus der Adjunktion her. Welcher Monade entspricht dies?